



TITLE:

# 単純代数群の概均質ベクトル空間 の分類 (概均質ベクトル空間の研究 )

AUTHOR(S):

木村, 達雄

---

CITATION:

木村, 達雄. 単純代数群の概均質ベクトル空間の分類 (概均質ベクトル空間の研究). 数理解析研究所講究録 1981, 416: 30-41

ISSUE DATE:

1981-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102480>

RIGHT:

## 単純代数群の概均質ベクトル空間の分類

筑波大数学系 木村達雄

連結線型代数群  $G$  の有限次元有理表現  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  が Zariski-稠密な orbit をもつとき  $(G, \rho, V)$  を概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space) という。但しすべて複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義されているとする。群  $G$  が reductive ならば,  $G = GL(1)^s \times G_1 \times \cdots \times G_k$  ( $s \leq l$ ),  $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$ ,  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ , と仮定してよい。但し  $\rho_j: G \rightarrow GL(V_j)$  ( $j=1, \dots, l$ ) は  $G$  の既約表現である。  $\rho$  が既約, 即ち  $l=1$  の場合の分類は既に完成している (佐藤幹夫-木村達雄 [1])。ここでは  $k=1$  の場合 ( $l \geq 2$  としよ) の分類を行なう。完全に述べるとう長くなるので, やり方の説明と例をあげ, 結果と相対不変式についてのみ完全に記述する。詳しくは (木村 [2]) を参照して下さい。

### §1. 分類の方針といくつかの例

まず  $G = GL(1)^l \times G_1$ ,  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ ,  $G_1$  = 単純群, の場合をやれば,  $G = GL(1)^s \times G_1$  ( $s \leq l$ ) の場合は, それらのうちから選ぶの

は簡単である。  $G_1$  のリー環  $\mathfrak{g}_1$  が  $A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  の場合に向けて各々調べればよい。原理は,  $(G, \rho, V)$  概均質  $\Leftrightarrow \exists x \in V$  s.t.  $\dim G_x = \dim G - \dim V$ , 但し  $G_x = \{g \in G; \rho(g)x = x\}$  より, 特に  $(G, \rho, V)$  概均質  $\Rightarrow \dim G \geq \dim V$ , に注目して, まず  $\dim G \geq \dim V$  となる三つ組  $(G, \rho, V)$  を求め, その各々について概均質性を check する方法をとる。とくに  $(G, \rho, V)$  概均質  $\Rightarrow (G, \rho_i, V_i) (i=1, \dots, \ell)$  既約概均質ベクトル空間, ゆえ  $(G, \rho_i, V_i)$  は [1] で得られた既約概均質ベクトル空間の表に表われる。得られた各々の空間の概均質性の証明はそれぞれ工夫がいる。例えば, 次の2つの空間の概均質性を調べてみよう。

$$(1) (GL(1)^3 \times SL(6), \text{目} \oplus \square \oplus \square^*, V(20) \oplus V(6) \oplus V(6)^*)$$

$$(2) (GL(1)^2 \times Spin(12), \text{偶半スピノ表現} \oplus \text{奇半スピノ表現}, V_e(32) \oplus V_o(32))$$

*Proposition* (1) は概均質ではない。

*証明*)  $(GL(1) \times SL(6), \text{目}, V(20))$  の generic isotropy subalgebra は  $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}; A, B \in \mathfrak{sl}(3) \right\}$  である ([1]) から (1) の概均質性は  $G = GL(1)^3 \times (SL(3) \times SL(3)) \ni g = (\alpha, \beta; A, B), V = \{X = (x, x', y, y') \in (\mathbb{C}^3)^4\}, \rho(g)X = (\alpha Ax, \alpha Bx', \beta^* A^{-1}y, \beta^* B^{-1}y')$  で与えられる  $(G, \rho, V)$  の概均質性に帰着するが,  $f(X) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x', y' \rangle}$  はその絶対不変式で (勿論定数でないから) あるから  $(G, \rho, V)$  は概均質ではあり得ない。実際もし概均質ならば, 絶対不変式は Zariski-dense orbit 上で定数, 従って全体でも定数となる。

るからである(証明終)

*Proposition* (2)も概均質ではない。

証明)  $(GL(1) \times Spin(12), \text{偶半スピン表現}, Ve(32))$  の generic isotropy subgroup は  $SL(6)$  である。これを  $Spin(12)$  の奇半スピン表現に制限してみると, weights の分解から,  $SL(6)$  の表現空間として  $V_o(32)$  は  $V_o(32) = V(20) \oplus V(6) \oplus V^*(6)$ ,  $\square \oplus \square \oplus \square^*$  と分解する事がわかる。よって(2)の概均質性と  $(GL(1) \times SL(6), \square \oplus \square \oplus \square^*, V(20) \oplus V(6) \oplus V^*(6))$  の概均質性は同値であるが, より大きな群の作用による(1)ですら概均質でないのだから, これは概均質ではない(証明終)

このような調子で調べていくのであるが, 長くなるので略し次に結果のみを記そう。

## §2. 単純代数群の(既約でない)概均質ベクトル空間とその相対不変式の表

$\frac{G}{\rho} / H$  は  $(G, \rho, V)$  の generic isotropy subgroup が  $H$  と局所同型な事を表わす。  $N$  は独立な相対不変式の個数,  $f_1, \dots, f_N$  は相対不変式の既約多項式からなる free base,  $f_1, \dots, f_N$  を具体的に与える必要があるとき,  $V$  を具体的に書き, また action  $\rho$  もそれに応じて記す事もある。

$GL(1)^l \times G_l, V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$  のとき,  $\rho$  は  $GL(1)^l$  の action を記さ

ないが,  $GL(1)^2$  は  $V$  の各既約成分の scalar 倍として作用する。

$S$  重なる  $GL(1)^S$  でも概均質になる場合には, そうなる最小の  $S$  について  $G_P/H$  を記す。この場合の  $GL(1)^S$  の scalar 倍の action は ■ で記す事にしよう。

(I) 正則概均質ベクトル空間 (regular P.V. 即ち Hessian  $f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) \neq 0$  となる相対不変式  $f$  の存在する空間)

$$(1) \quad GL(1)^2 \times SL(n) / \square \oplus \square^* / GL(1) \times SL(n-1) \left( \frac{GL(1) \times SL(n)}{\blacksquare \otimes (\square \oplus \square^*) / SL(n-1)} \right)$$

$$N=1, \quad f_1(\tilde{x}) = \langle x, y \rangle \quad \text{for } \tilde{x} = (x, y) \in V(n) \oplus V^*(n).$$

$$(2) \quad GL(1)^n \times SL(n) / \underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_n / GL(1)^{n-1} \left( \frac{GL(1) \times SL(n)}{\blacksquare \otimes (\underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_n)} / 1 \right)$$

$$N=1, \quad f_1(X) = \det X \quad \text{for } X \in V = M(n) (= n \times n \text{ 行列全体})$$

$$(3) \quad GL(1)^{n+1} \times SL(n) / \underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_{n+1} / 1, \quad N = n+1,$$

$$f_k(X) = \det(x_1, \dots, \check{x}_k, \dots, x_{n+1}) \quad \text{for } k=1, \dots, n+1 \quad \text{for } X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in M(n, n+1)$$

$$(4) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \square \oplus \square \oplus \square / GL(1) \times S_p(m-1) \left( \frac{GL(1)^3 \times SL(2m)}{\blacksquare \otimes \square \oplus (\blacksquare \otimes (\square \oplus \square))} / S_p(m-1) \right)$$

$$N=2, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf(X) (= X \text{ の Pfaffian}), \quad f_2(\tilde{x}) = {}^t y \Delta(X) \cdot z$$

( $\Delta(X)$  は  $X$  の余因子行列) for  $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$   
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ ,  $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \gamma Az)$   
 for  $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$ .

$$(5) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \left( \begin{smallmatrix} \square \oplus \square \oplus \square^* \\ GL(1) \times S_p(m-1) \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} GL(1)^2 \times SL(2m) \\ (\square \oplus \square) \oplus (\square \oplus (D \oplus D^*)) \end{smallmatrix} / S_p(m-1) \right)$$

$N=2$ ,  $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$ ,  $f_2(\tilde{x}) = \langle y, z \rangle$  for  $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$   
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ ,  $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \gamma {}^tA^{-1}z)$   
 for  $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$ ,  $\tilde{x} \in V$ .

$$(6) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \left( \begin{smallmatrix} \square \oplus \square^* \oplus \square^* \\ GL(1) \times S_p(m-1) \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} GL(1)^2 \times SL(2m) \\ (\square \oplus \square) \oplus (\square \oplus (\square \oplus \square^*)) \end{smallmatrix} / S_p(m-1) \right)$$

$N=2$ ,  $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$ ,  $f_2(\tilde{x}) = {}^tyXz$  for  $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$   
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$ ,  $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA, \beta {}^tA^{-1}y, \gamma {}^tA^{-1}z)$   
 for  $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$ .

$$(7) \quad GL(1)^2 \times SL(2m+1) / \left( \begin{smallmatrix} \square \oplus \square \\ GL(1) \times S_p(m) \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} GL(1) \times SL(2m+1) \\ \square \oplus (\square \oplus \square) \end{smallmatrix} / S_p(m) \right)$$

$N=1$ ,  $f_1(\tilde{x}) = Pf(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} \in V = \left\{ \tilde{x} = \begin{bmatrix} X & y \\ -{}^ty & 0 \end{bmatrix}; {}^tX = -X \right.$   
 $\left. \in M(2m+1), y \in \mathbb{C}^{2m+1} \right\}$ ,  $\rho(g)\tilde{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}A & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix} \tilde{x} {}^t \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}A & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha AX^tA & \beta Ay \\ -\beta {}^ty^tA & 0 \end{bmatrix}$

for  $g = (\alpha, \beta, A) \in GL(1)^2 \times SL(2m+1)$

$$(8) \quad GL(1)^4 \times SL(2m+1) / \square \oplus \square \oplus \square \oplus \square / Sp(m-1)$$

$$N=4, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf \left[ \begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -y^t & 0 \end{array} \right], \quad f_2(\tilde{x}) = Pf \left[ \begin{array}{c|c} X & z \\ \hline -z^t & 0 \end{array} \right], \quad f_3(\tilde{x}) = Pf \left[ \begin{array}{c|c} X & w \\ \hline -w^t & 0 \end{array} \right]$$

$$f_4(\tilde{x}) = Pf \left[ \begin{array}{c|c} X & yzw \\ \hline -{}^t(yzw) & 0 \end{array} \right] \quad \text{for } \tilde{x} \in V = \{ \tilde{x} = (X; y, z, w);$$

$${}^tX = -X \in M(2m+1), \quad y, z, w \in \mathbb{C}^{2m+1} \}, \quad p(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \delta Az, sAw)$$

$$\text{for } g = (\alpha, \beta, \delta, s; A) \in GL(1)^4 \times SL(2m+1).$$

$$(9) \quad GL(1)^4 \times SL(2m+1) / \square \oplus \square \oplus \square^* \oplus \square^* / Sp(m-1)$$

$$N=4, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf \left[ \begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -y^t & 0 \end{array} \right], \quad f_2(\tilde{x}) = \langle y, z \rangle, \quad f_3(\tilde{x}) = \langle y, w \rangle,$$

$$f_4(\tilde{x}) = {}^tzXw \quad \text{for } \tilde{x} = (X; y, z, w) \in V, \quad p(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \delta A^t z, sA^t w)$$

$$(10) \quad GL(1)^2 \times SL(n) / \square \oplus \square / O(n-1)$$

$$N=2, \quad p(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay) \quad \text{for } g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(n),$$

$$\tilde{x} \in V = \{ \tilde{x} = (X; y); {}^tX = X \in M(n), y \in \mathbb{C}^n \}, \quad f_1(\tilde{x}) = \det X,$$

$$f_2(\tilde{x}) = {}^ty \cdot \Delta(X) \cdot y, \quad \text{but } \Delta(X) \text{ is the cofactor matrix of } X.$$

$$(11) \quad GL(1)^2 \times SL(n) / \square \oplus \square^* / O(n-1)$$

$$N=2, \quad f_1(\tilde{x}) = \det X, \quad f_2(\tilde{x}) = {}^tyXy \quad \text{for } \tilde{x} \in V = \{ (X, y); X =$$

$${}^tX \in M(n), y \in \mathbb{C}^n \}, \quad p(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA, \beta {}^tA^{-1}y) \quad \text{for } g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(n).$$

$$(12) \quad GL(1)^2 \times SL(7) / \begin{matrix} \square \oplus \square \\ SL(3) \end{matrix}$$

$$N=2, \quad V = \{ \tilde{x} = (x, y); x = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k \in \wedge^3 \mathbb{C}^7, y \in \mathbb{C}^7 \}$$

$P(g)\tilde{x} = (\alpha \beta(A)x, \beta Ay), \beta(A)x = \sum x_{ijk} (Au_i) \wedge (Au_j) \wedge (Au_k)$  for  $g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(7)$ .  $\textcircled{2} = \sum_{i=1}^7 y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$  とおき  $7 \times 7$  行列  $\varphi(x)$  と  $\varphi^*(x)$  を次の様に定める。  $\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$ , 但し  $\varphi_{ij}(x)$  は  $x \wedge \textcircled{2} \wedge \textcircled{2} = \left( \sum_{i,j} \varphi_{ij}(x) y_i y_j \right) \omega$  ( $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_7$ ) で定める。  $\varphi^*(x) = (\varphi_{ij}^*(x))$ ,  $\varphi_{ij}^*(x) = \sum_{s,t} f_{it}^s(x) f_{sj}^t(x)$ ,  $x \wedge \textcircled{2} = \sum_{s,i,t} f_{it}^s(x) y_s u_i \wedge u_t$  但し  $u_i \wedge u_j \wedge u_k = \omega$ 。然るに  $\varphi(\beta(A)x) = A \varphi(x)^t A$ ,  $\varphi^*(\beta(A)x) = {}^t A^{-1} \varphi^*(x) A^{-1}$  for  $A \in SL(7)$  が成立つ ([3] を参照), このとき  $f_1(\tilde{x}) = \text{tr} \varphi(x) \varphi^*(x)$ ,  $f_2(\tilde{x}) = {}^t y \cdot \varphi(x) \cdot y$ .

$$(13) \quad GL(1)^2 \times SL(7) / \begin{matrix} \square \oplus \square^* \\ SL(3) \end{matrix}$$

$$N=2. \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha \beta(A)x, \beta \cdot {}^t A^{-1} y) \Rightarrow f_1(\tilde{x}) = \text{tr} \varphi(x) \varphi^*(x), \\ f_2(\tilde{x}) = {}^t y \cdot \varphi(x) \cdot y.$$

$$(14) \quad GL(1)^2 \times Spin(8) / \begin{matrix} \text{ベクトル表現} \oplus \text{半スピノ表現} \\ (G_2) \end{matrix}$$

$$N=2. \quad Spin(8) \xrightarrow[\text{(偶, 奇) 半スピノ表現}]{\text{ベクトル表現}} SO(8) \quad \text{where 相対不変式は}$$

$$2\text{つの2次式. } f_1(\tilde{x}) = g_1(x), f_2(\tilde{x}) = g_2(y), \tilde{x} = (x, y) \in V(8) \oplus V(8)$$



(注)  $Spin(8)$  の 3 つの表現, (ベクトル表現, 偶半スピン表現, 奇半スピン表現) のどの相異なる 2 つの組合せも (14) と (擬均質ベクトル空間として) 同型になる。

$$(15) \quad GL(1)^2 \times Spin(7) \quad \text{ベクトル表現} \oplus \text{スピン表現} \quad / \quad SL(3)$$

$N=2$ ,  $Spin(7) \xrightarrow{\text{ベクトル表現}} SO(7)$ ,  $Spin(7) \xrightarrow{\text{スピン表現}} SO(8)$ , ゆえ 相対不変式は 7変数, 8変数の二次式である。

$$(16) \quad GL(1)^2 \times Spin(10) \quad \text{偶半スピン表現} \oplus \text{偶半スピン表現} \quad / \quad GL(1) \times (G_2)$$

$N=1$ . 偶半スピン  $\chi$  は  $\chi = \chi_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_{ij} e_i e_j + \sum_k x_k^* e_k^*$ ,

$e_k e_k^* = e_1 \cdots e_5$  と表わせる ([1] をみよ).  $X = (x_{ij})$  をこれより得られる  $5 \times 5$  歪対称行列,  $X_i$  を  $(-1)^i X$  から  $i$  行  $i$  列を除いて得られる  $4 \times 4$  歪対称行列。一般に  $4 \times 4$  歪対称行列  $Y = (y_{ij})$  に対し  $Pf(Y) = y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23}$  とおく (即ち Pfaffian)。

偶半スピン表現空間  $V(16)$  上に次の 10 個の 2 次形式  $Q_i(x)$  ( $i=1, \dots, 10$ ) を定義する。  $Q_i(x) = \sum_{j=1}^5 x_{ij} x_j^*$ ,  $Q_{i+5}(x) = x_0 x_i^* + Pf(X_i)$  ( $i=1, \dots, 5$ )。更に  $B_i(x, y) = Q_i(x+y) - Q_i(x) - Q_i(y)$  とおく。然るば

$$F_1(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^5 B_i(x, y) B_{i+5}(x, y) \quad \text{となる。}$$

$$\left( \begin{array}{c} GL(1) \times Spin(10) \\ \bullet \oplus (\text{偶半スピン} \oplus \text{偶半スピン}) \end{array} \right) / (G_2)$$

$$(17) \quad GL(1)^2 \times Spin(10) / \text{ベクトル表現} \oplus \text{半スピン表現} / Spin(7)$$

$N=2$ ,  $f_1(\hat{x}) = q(x) (=10\text{変数}2\text{次形式})$ ,  $f_2(\hat{x}) = \langle x, Q(y) \rangle$   
 但し  $Q(y) = {}^t(Q_1(y), \dots, Q_{10}(y))$  for  $\hat{x} = (x, y) \in V(10) \oplus V(16)$ .  
 (単に半スピン表現と記した場合は, 偶でも奇でもどちらでもよい,  
 即ち同型になる, 事を示している)

$$(18) \quad GL(1)^2 \times Spin(12) / \text{ベクトル表現} \oplus \text{半スピン表現} / SL(5)$$

$N=2$ , 相対不変式は 12変数 2次式, 32変数 4次式である。

$$(19) \quad GL(1)^2 \times Sp(n) / \square \oplus \square / GL(1) \times Sp(n-1) \left( \frac{GL(1) \times Sp(n)}{\blacksquare \oplus (\square \oplus \square)} / Sp(n-1) \right)$$

$N=1$ ,  $f_1(\hat{x}) = Pf {}^t(xy)J(xy)$  for  $\hat{x} = (x, y) \in V(2n) \oplus V(2n)$ ,  
 $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ .

$$(20) \quad GL(1)^2 \times Sp(3) / \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \oplus \square / SL(2)$$

$N=2$ ,  $f_1(\hat{x})$  は  $Sp(3)$  の 14変数 4次式,  $f_2(\hat{x})$  は  
 $SL(6)$  の 20変数 4次の相対不変式.

(II) 非正則概均質ベクトル空間 (この空間の相対不変式は正則の場合ほど重要でないのので省略し、個数  $N$  のみ示す)

$$(1) \quad \frac{GL(1)^\ell \times SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \cdots \oplus \square}_\ell} / (GL(1)^\ell \times SL(n-\ell)) \cdot G_a^{\ell(n-\ell)} \quad (2 \leq \ell \leq n-1)$$

$$N=0, \quad \left( \frac{SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \cdots \oplus \square}_\ell} / SL(n-\ell) \cdot G_a^{\ell(n-\ell)} \right), \quad G_a \cong \mathbb{C}; 1\text{-次元加法群}$$

$$(2) \quad \frac{GL(1)^\ell \times SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \cdots \oplus \square \oplus \square^*}_{\ell-1}} / (GL(1) \times SL(n-\ell+1)) \cdot G_a^{(n-\ell+1)(\ell-2)} \quad (n+\ell \geq 3)$$

$$N=\ell-1, \quad \left( \frac{GL(1)^{\ell-1} \times SL(n)}{(\blacksquare \otimes \square) \oplus \cdots \oplus (\blacksquare \otimes \square) \oplus \square^*}_{\ell-1} / SL(n-\ell+1) \cdot G_a^{(n-\ell+1)(\ell-2)} \right)$$

$$(3) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\square \oplus \square} / GL(1)^2 \cdot G_a^{2m} \quad \left( \frac{SL(2m+1)}{\square \oplus \square} / G_a^{2m} \right)$$

$$N=0$$

$$(4) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m)}{\square \oplus \square} / (GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(m-1)$$

$N=1$ ,  $U(m-1)$  は  $m-1$  次元 unipotent 群, という意味.

$$\left( \frac{GL(1) \times SL(2m)}{\blacksquare \otimes (\square \oplus \square)} / S_p(m-1) \cdot U(m-1) \right)$$

$$(5) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m)}{\square \oplus \square^*} / (GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(m-1)$$

$$N=1, \quad \left( \frac{GL(1) \times SL(2m)}{\blacksquare \otimes (\square \oplus \square^*)} / S_p(m-1) \cdot U(m-1) \right)$$

$$(6) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \square^*} / ((GL(1)^2 \times S_p(m-1)) \cdot U(4m-2)),$$

$$N=0 \quad \left( \frac{SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \square^*} / S_p(m-1) \cdot U(4m-2) \right)$$

$$(7) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \square \oplus \square} / ((GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-1))$$

$$N=2, \quad \left( \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\blacksquare \otimes (\mathbb{H} \oplus \square) \oplus (\blacksquare \otimes \square)} / S_p(m-1) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$(8) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \square \oplus \square^*} / ((GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-1))$$

$$N=2 \quad \left( \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\blacksquare \otimes (\mathbb{H} \oplus \square) \oplus (\blacksquare \otimes \square^*)} / S_p(m-1) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$(9) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \square^* \oplus \square^*} / ((GL(1)^2 \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-2))$$

$$N=1 \quad \left( \frac{GL(1) \times SL(2m+1)}{\mathbb{H} \oplus \blacksquare \otimes (\square^* \oplus \square^*)} / S_p(m-1) \cdot U(2m-2) \right)$$

$$(10) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(6)}{\mathbb{H} \oplus \square} / ((GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot G_a^4) \quad \left( \frac{GL(1) \times SL(6)}{\blacksquare \otimes (\mathbb{H} \oplus \square)} / (SL(2) \times SL(2)) G_a^4 \right)$$

$$N=1,$$

$$(11) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(6)}{\mathbb{H} \oplus \square \oplus \square} / GL(1)^2 \cdot G_a^4 \quad \left( \frac{GL(1) \times SL(6)}{\blacksquare \otimes (\mathbb{H} \oplus \square \oplus \square)} / G_a^4 \right)$$

$$N=1,$$

## 参考文献

- [1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants  
Nagoya Math. J. Vol 65 (1977) 1-155
  - [2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups, (preprint)
  - [3] T. Kimura, Remark on Some Combinatorial Construction of Relative Invariants, (Tsukuba J. of Math. Vol 5, No 1, 1981 June)
  - [4] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima, Microlocal Analysis of Prehomogeneous Vector Spaces,  
Inv. Math. (1981)
  - [5] T. Kimura and M. Muro, On Some Series of Regular Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces, Proc. Japan Acad., Vol 55, Ser A, No. 10 (1979), 384-389
  - [6] T. Kimura, The  $\ell$ -functions and holonomy diagrams of Irreducible Regular Prehomogeneous Vector Spaces,  
(Nagoya Math. J. Vol 85 (1982) )
  - [7] 木村達雄, 概均質ベクトル空間の理論 (論説) 数学オ 32巻 2号 (1980)
- ( 注) 最近, 一般の Reductive 群の場合の概均質ベクトル空間) の分類原理が見つかった。これについては他の機会にゆづる。